Departamento de Física – CCNE/UFSM

Exercícios - Oscilações

Um movimento harmônico unidimensional pode ser caracterizado pea equação diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + {\omega_\mathrm{o}}^2\, x = f(t)\,, \tag{1}$$

onde $x = x(t)$ é a função que descreve o movimento em função do tempo t, e ω_o é freqüência angular natural do sistema, γ uuma constante de atrito, e $f(t)$ é o termo forçante, que representa as forças externas adicionais aplicadas ao sistema.

1) Determine as unidades (dimensões físicas) das constantes ω_o, γ e de $f(t)$ nos casos em que (i) $x(t)$ tem dimensões de comprimento e (ii) $x(t)$ é variável angular (medido em radianos).

A solução dessa equaço para $x(t)$ pode ser escrita como a soma de duas funções $x(t) = x_\mathrm{h}(t) + x_\mathrm{p}(t)$, onde $x_\mathrm{h}(t)$ é solução da equação homogênea (com $f(t) = 0$).

$$\frac{d^2x\mathrm{h}}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx_\mathrm{h}}{dt} + {\omega_\mathrm{o}}^2\, x_\mathrm{h} = 0\,, \tag{2}$$

2) Suponha que as solução da equação (2) são da forma $x_\mathrm{h}(t) = A_\mathrm{o}\,\mathrm{e}^{\alpha t}$, onde A_o e α são constantes arbitrárias. Verifique que essa equação implica que α deve assumir os valores $-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_\mathrm{o}^2}$, enquanto que A_o não é determinado por essa equação. Observe, então, que a função $x_\mathrm{h}(t) = \mathrm{e}^{-\gamma t}\left(A_1\mathrm{e}^{\beta t} + A_2\mathrm{e}^{-\beta t}\right)$, A_1 e A_2 constantes, e $\beta = \sqrt{\gamma^2 - \omega_\mathrm{o}^2}$, é solução da Eq. (2).

A solução encontrada no problema (2) tem três casos particulares:

3.a) Movimento super-amortecido: Qual a condição para que a constante β do item (a) beta seja um número real? Verifique que, se $\beta > 0$, então $x_\mathrm{h}(t)$ é a soma de exponenciais decrescentes no tempo.

3.b) Movimento criticamente amortecido: Mostre (verifique) que $x_\mathrm{h}(t) = a\mathrm{e}^{-\gamma t}(a_1 t + b_1)$, a_1 e b_1 constantes, também é solução da Eq. (2) se $\gamma = \omega_\mathrm{o}$.

3.c) Oscilador sub-amortecido: Verifique que a função $x_\mathrm{h}(t) = A\mathrm{e}^{-\gamma \mathrm{t}}\cos(\omega'\mathrm{t} + \phi)$, com A a ϕ constantes também é solução. Determine ω' nesse caso.

4- Num oscilador amortecido há uma força externa aplicada tal que $f(t) = f_\mathrm{o}\cos(\omega t)$ onde f_o e ω são constantes.

4.a) Determine as unidades das constantes f_o e ω nos casos do problema (1).

4.b) Verifique que com tal termo forçante a solução particular pode ser escrita da forma $x_p(t) = A\cos(\omega t - \delta)$, onde

$$A = \frac{f_\mathrm{o}}{\sqrt{\left({\omega_\mathrm{o}}^2 - \omega^2\right)^2 - 4\gamma^2\omega^2}}\,, \qquad \tan\delta = \frac{2\gamma\omega}{{\omega_\mathrm{o}}^2 - \omega^2}\,.$$

4.c) Estabeleça a condição de ressonância (O máximo da amplitude de $x_\mathrm{p}(t)$ em função de ω).

4.d) Encontre a potência média num período e mostre que a potência transferida pelo termo forçante $f(t)$ é máxima na ressonância.

5- Um pêndulo simples, cuja massa é $m = 0,1kg$ e cujo comprimento é $l = 10cm$, é mergulhado num fluido e está submetido ao campo gravitacional da Terra. A viscosidade do fluido causa uma força de atrito sobre a massa proporcional a sua velocidade da forma $f_a = -bv$, onde b é uma constante positiva.

a) Encontre a equação de movimento, e mostre que, para pequenas oscilações (θ), o pêndulo se comporta como um oscilador amortecido. Ignore o empuxo do fluido sobre a massa.

b) Determine os intervalos de valores de b tais que o movimento do pêndulo seja (i) super-amortecido, (ii) criticamente amortecido e (iii) sub-amortecido.

c) Faça $b = 2kg/s$ e encontre a freqüência e o período de oscilação do pêndulo.

d) Encontre o tempo necessário para que a amplitude das oscilações amortecidas se reduzam a metade do valor inicial.

e) Qual o tempo necessário para que a energia mecânica se reduza a metade do valor inicial?