

Departamento de Física – CCNE/UFMS  
Exercícios - Oscilações

Um movimento harmônico unidimensional pode ser caracterizado pela equação diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_o^2 x = f(t), \quad (1)$$

onde  $x = x(t)$  é a função que descreve o movimento em função do tempo  $t$ , e  $\omega_o$  é frequência angular natural do sistema,  $\gamma$  uma constante de atrito, e  $f(t)$  é o termo forçante, que representa as forças externas adicionais aplicadas ao sistema.

1) Determine as unidades (dimensões físicas) das constantes  $\omega_o$ ,  $\gamma$  e de  $f(t)$  nos casos em que (i)  $x(t)$  tem dimensões de comprimento e (ii)  $x(t)$  é variável angular (medido em radianos).

A solução dessa equação para  $x(t)$  pode ser escrita como a soma de duas funções  $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$ , onde  $x_h(t)$  é solução da equação homogênea (com  $f(t) = 0$ ).

$$\frac{d^2x_h}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx_h}{dt} + \omega_o^2 x_h = 0, \quad (2)$$

2) Suponha que as soluções da equação (2) são da forma  $x_h(t) = A_o e^{\alpha t}$ , onde  $A_o$  e  $\alpha$  são constantes arbitrárias. Verifique que essa equação implica que  $\alpha$  deve assumir os valores  $-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_o^2}$ , enquanto que  $A_o$  não é determinado por essa equação. Observe, então, que a função  $x_h(t) = e^{-\gamma t} (A_1 e^{\beta t} + A_2 e^{-\beta t})$ ,  $A_1$  e  $A_2$  constantes, e  $\beta = \sqrt{\gamma^2 - \omega_o^2}$ , é solução da Eq. (2).

A solução encontrada no problema (2) tem três casos particulares:

3.a) Movimento super-amortecido: Qual a condição para que a constante  $\beta$  do item (a) seja um número real? Verifique que, se  $\beta > 0$ , então  $x_h(t)$  é a soma de exponenciais decrescentes no tempo.

3.b) Movimento criticamente amortecido: Mostre (verifique) que  $x_h(t) = ae^{-\gamma t}(a_1 t + b_1)$ ,  $a_1$  e  $b_1$  constantes, também é solução da Eq. (2) se  $\gamma = \omega_o$ .

3.c) Oscilador sub-amortecido: Verifique que a função  $x_h(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega' t + \phi)$ , com  $A$  e  $\phi$  constantes também é solução. Determine  $\omega'$  nesse caso.

4- Num oscilador amortecido há uma força externa aplicada tal que  $f(t) = f_o \cos(\omega t)$  onde  $f_o$  e  $\omega$  são constantes.

4.a) Determine as unidades das constantes  $f_o$  e  $\omega$  nos casos do problema (1).

4.b) Verifique que com tal termo forçante a solução particular pode ser escrita da forma  $x_p(t) = A \cos(\omega t - \delta)$ , onde

$$A = \frac{f_o}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}, \quad \tan \delta = \frac{2\gamma\omega}{\omega_o^2 - \omega^2}.$$

4.c) Estabeleça a condição de ressonância (O máximo da amplitude de  $x_p(t)$  em função de  $\omega$ ).

4.d) Encontre a potência média num período e mostre que a potência transferida pelo termo forçante  $f(t)$  é máxima na ressonância.

5- Um pêndulo simples, cuja massa é  $m = 0,1\text{kg}$  e cujo comprimento é  $l = 10\text{cm}$ , é mergulhado num fluido e está submetido ao campo gravitacional da Terra. A viscosidade do fluido causa uma força de atrito sobre a massa proporcional a sua velocidade da forma  $f_a = -bv$ , onde  $b$  é uma constante positiva.

- a) Encontre a equação de movimento, e mostre que, para pequenas oscilações ( $\theta$ ), o pêndulo se comporta como um oscilador amortecido. Ignore o empuxo do fluido sobre a massa.
- b) Determine os intervalos de valores de  $b$  tais que o movimento do pêndulo seja (i) super-amortecido, (ii) criticamente amortecido e (iii) sub-amortecido.
- c) Faça  $b = 2\text{kg/s}$  e encontre a frequência e o período de oscilação do pêndulo.
- d) Encontre o tempo necessário para que a amplitude das oscilações amortecidas se reduzam a metade do valor inicial.
- e) Qual o tempo necessário para que a energia mecânica se reduza a metade do valor inicial?